Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

Атаманова Мария Михайловна

Полилинейные формы и исключительные группы

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м.н., доцент Степанов А. В.

Рецензент:
к. ф.-м. н. Лузгарев А. Ю.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Department of Higher Algebra and Number Theory

Maria Atamanova

Multilinear forms and exceptional groups

Graduation Project

Scientific supervisor:
Sci. Dr., docent Alexey Stepanov

Reviewer:
Sci. Cand. Alexander Luzgarev

Saint-Petersburg
2017

Введение

Алгебраические группы часто задаются как преобразования, сохраняющие некоторые полилинейные формы. Так, ортогональная группа (скажем, над полем характеристики, отличной от 2) по определению является группой линейных преобразований, сохраняющих невырожденную квадратичную форму, или, что то же самое, сохраняющих соответствующую билинейную форму. Аналогично, симплектическая группа — это группа линейных преобразований, сохраняющих симплектическую билинейную форму.

В 1905 году Леонард Диксон построил инвариантную кубическую форму для группы типа E_6. Эта форма от двадцати семи переменных впоследствии изучалась в работах Клода Шевалле, Ганса Фрейденталя и многих других. Майкл Ашбахер доказал (см. [2]), что группа линейных преобразований 27-мерного пространства, сохраняющих эту форму, совпадает с односвязной группой Шевалле типа E_6 над произвольным полем (даже в случаях характеристик 2 и 3)

Еще раньше Леонард Диксон описал инвариантную форму четвертой степени для группы типа E_7. Эта форма действует на 56-мерном пространстве минимального представления односвязной группы Шевалле типа E_7. Также известно, что на этом пространстве есть инвариантная симплектическая форма. Брюс Куперстейн ([4], см. также [3]) показал, что группа линейных преобразований, сохраняющих обе этих формы, совпадает с группой Шевалле типа E_7 для случая поля характеристики, отличной от 2. В работе [6] снято ограничение на характеристику за счет перехода от биквадратной формы к *несимметричной* четырехлинейной.

Изучение минимальных представлений групп типов E_6 и E_7 облегчается тем, что эти представления являются *микровесовыми.* У группы типа E_8, в то же время, вообще нет микровесовых представлений. Ее минимальное представление — присоединенное. Поэтому представляет интерес рассмотрение присоединенных представлений исключительных групп и заданных на них инвариантных полилинейных форм.

Описанные выше полилинейные формы тесно связаны с уравнениями на орбиту вектора старшего веса. Хорошо известно (см. [1]), что орбита вектора старшего веса в любом представлении задается квадратичными уравнениями. Продифференцируем инвариантную трилинейную форму для группы типа E_6 по каждой координате: мы получим набор из 27 квадратичных многочленов. Оказывается, эти многочлены в точности выделяют орбиту вектора старшего веса (над алгебраически замкнутым полем). Аналогично, вторые частные производные четырехлинейной инвариантной формы для группы типа E_7 являются поляризациями квадратичных многочленов, задающих орбиту вектора старшего веса минимального представления этой группы (впрочем, здесь возникают тонкости, связанные с наличием симплектической формы на пространстве 56-мерного представления).

Уравнения на орбиту вектора старшего веса в присоединенных представлениях групп типа A, D, E описаны в статье [9]. (Если быть точнее, они описаны только для случаев D, E, но для A все переносится дословно.) Уравнения бывают трех типов, которые в [9] названы как «уравнения для угла $\pi/2$», «уравнения для угла $2\pi/3$» и «уравнения для угла π». В работе [5] построены кубические формы на пространстве присоединенного представления группы Шевалле типа E_7, частные производные которых по любой переменной являются линейными комбинациями уравнений первых двух типов.

Пусть теперь система корней будет A, D или E. Обозначим систему уравнений из всех трех типов за J. Эти уравнения не являются линейно независимыми и тем самым ранг J меньше, чем ее мощность. В работе вычислен ранг J. Более того, оказывается, что во всех случаях существует неприводимое представление, размерность которого равна этому рангу.

Вспомним, что на столбцы мы можем действовать элементарными унипотентными корневыми элементами $x_\rho(\xi)$; это индуцирует действие на уравнениях. Пусть f — какое-то уравнение из J. Два новых уравнения получаются из f таким образом: $x_\rho(\xi)f = f + \xi f_1 + \xi^2 f_2$, где f_1, f_2 из J [9]. Назовем *орбитой уравнения* f минимальную подсистему J, содержащую f и замкнутую относительно этой операции.

Любое уравнение f из J строится по какому-то максимальному квадрату Ω. Среди квадратов данного типа имеется ровно один *доминантный*, для которого его вес σ доминантен [17].

Теорема 1. *Уравнения из орбиты f задают неприводимое представление, соответствующее весу $\varpi = \sigma$.*

Работа устроена следующим образом: в первой главе напоминаются основные обозначения; во второй главе вычисляются ранги систем уравнений; в третьей главе приводится сопоставление уравнений весам соответствующего представления и разбирается, для наглядности, пример в случае $\Phi = E_8$; и, наконец, в четвертой главе приводится использование данного вычисления.

1. Основные обозначения

Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней ранга $l \geq 4$. Пусть $\Pi = \alpha_1, \dots, \alpha_l$ — фундаментальная система в Φ (ее элементы называются *простыми* корнями). Мы всегда используем ту же нумерацию простых коней, что в [7]. Для $\alpha \in \Phi$ мы имеем $\alpha = \sum_{s=1}^{l} m_s(\alpha)\alpha_s$

Пусть $G = G(\Phi, R)$ — односвязная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом R с 1. Мы будем работать с присоединенным представлением $G(\Phi, R)$, которое дает нам неприводимое действие $G(\Phi, R)$ на свободном R-модуле V ранга $|\Phi| + l$. Обозначим через Λ множество весов нашего представления *с кратностями*. То есть $\Lambda = \Lambda^* \sqcup \Delta$, где $\Lambda^* = \Phi$ — множество ненулевых весов, а $\Delta = \{0_1, \dots, 0_l\}$ — множество нулевых весов. Мы фиксируем допустимый базис $\{e^\lambda |\ \lambda \in \Lambda^*\} \cup \{\hat{e}^i |\ 0_i \in \Delta\}$ в V. Тогда вектор $v \in V$ может быть единственным образом представлен как

$$v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda e^\lambda = \sum_{\alpha \in \Phi} v_\alpha e^\alpha + \sum_{i=1}^{l} \hat{v}_i \hat{e}^i.$$

Мы часто будем писать просто $v = (v_\lambda)$.

Множество корней системы Φ является подмножеством евклидова пространства E со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Мы будем также пользоваться произведением $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ для $\alpha, \beta \in E$ (для $\alpha, \beta \in \Phi$ получаем число Картана). Мы будем рассматривать лишь системы корней с *простыми связями*, что означает что все корни имеют длину 1. Поэтому $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \Phi$. Обозначим за $\angle(\alpha, \beta)$ угол между $\alpha, \beta \in E$.

Структурные константы $N_{\alpha,\beta}, \alpha, \beta \in \Phi$, простой комплексной алгебры Ли типа Φ детально описаны в [8], и далее мы используем приведенные там тождества без явных ссылок. Заметим, что в нашем случае $N_{\alpha,\beta} = 0$ или ± 1.

Пусть $k = 2, l-1, 4, 5, 7$ для $\Phi = A_l, D_l, E_6, E_7, E_8$, соответственно.

Определение 1. Множество корней $\Omega = \{\beta_i\}$, $i = 1, \dots, k, -k, \dots, -1$, такие что $\angle(\beta_i, \beta_{-i}) = \pi/2$ для $i = 1, \dots, k$ и $\angle(\beta_i, \beta_j) = \pi/3$ для $i \neq \pm j$, называется *максимальным квадратом.*

Вообще, набор корней $\{\beta_i\}$, удовлетворяющий указанным требованиям на углы, называется *квадратом*; максимальный такой набор содержит в точности $2k$ корней. Далее в тексте речь будет идти только о таких квадратах, поэтому слово «максимальный» будет опущено.

Сумма корней $\beta_i + \beta_{-i}$ не зависит от i, поэтому она общая для всего квадрата Ω. Обозначим этот вектор за $\sigma(\Omega)$.

Обратно, по любой паре ортогональных корней $\alpha, \beta \in \Phi$ можно восстановить единственный квадрат, содержащий эту пару, взяв все пары корней с той же суммой. Если этот квадрат максимален, то будем обозначать его через $\Omega(\alpha, \beta)$. Данные квадраты имеют различные интересные комбинаторные свойства и много где вылизают. В том числе по таким квадратам описываются уравнения на ненулевой столбец.

Занумеруем элементы квадрата как в определении 1: пусть $\Omega(\alpha,\beta)=\{\beta_1,\dots,\beta_k,\beta_{-k},\dots,\beta_{-1}\}$, причем $\beta_1=\alpha$, $\beta_{-1}=\beta$. Рассмотрим следующие многочлены в $\mathbb{Z}[\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Phi},\{\widehat{x}_s\}_{s=1}^l]$:

$$f^{\pi/2}_{\alpha,\beta}=x_\alpha x_\beta-\sum_{i\geq 2}N_{\alpha,-\beta_i}N_{\beta,-\beta_{-i}}x_{\beta_i}x_{\beta_{-i}};$$

$$f^{2\pi/3}_{\alpha,\beta}=\sum_{i\neq\pm1}N_{\alpha,-\beta_i}x_{\alpha-\beta_i}x_{\beta_i}-x_\alpha\sum_{s=1}^{l}\langle\beta,\alpha_s\rangle\widehat{x}_s;$$

$$f^{\pi}_{\alpha,\beta}=\sum_{i\neq\pm1}(x_{\alpha-\beta_i}x_{\beta_i-\alpha}-x_{-\beta_i}x_{\beta_i})-\sum_{s=1}^{l}\langle\alpha,\alpha_s\rangle\widehat{x}_s\cdot\sum_{s=1}^{l}\langle\beta,\alpha_s\rangle\widehat{x}_s.$$

Пусть теперь $v=(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in V$ — вектор из *орбиты вектора старшего веса*, то есть, $v\in G\cdot e^\rho$, где ρ — максимальный корень системы Φ (это в точности старший вес присоединенного представления). В [9] показано, что координаты вектора v удовлетворяют равенствам $f^{\pi/2}_{\alpha,\beta}(v)=0$, $f^{2\pi/3}_{\alpha,\beta}(v)=0$ и $f^{\pi}_{\alpha,\beta}(v)=0$.

Будем обозначать за J множество этих многочленов.

2. Вычисление ранга уравнений

Теорема 2. *Ранг системы уравнений J равен:*

- $(l-2)(l+1)^2(l+2)/4$ *для A_l;*
- $(2l-1)(l+1)$ *для D_l;*
- 650 *для E_6;*
- 1539 *для E_7;*
- 3875 *для E_8.*

Заметим, что $\pi/2-, 2\pi/3-, \pi-$уравнения между собой линейно независимы, так как никакой моном не содержится одновременно в двух типах уравнений. Поэтому достаточно посчитать ранг уравнений для каждого типа отдельно.

2.1. $\pi/2$-уравнения.

Пусть $I=\langle f^{\pi/2}\rangle$.

Заметим, что размерность I равна количеству максимальных квадратов, так как для любых ортогональных α,β, моном $x_\alpha x_\beta$, содержится только в уравнениях, построенных по квадрату, содержащему α,β, а все такие уравнения равны. А количество максимальных квадратов несложно посчитать, так как это количество всевозможных ортогональных пар, деленное на размер максимального квадрата.

Итого, получаем ранг системы $\pi/2$-уравнений есть $6C^4_{l+1}, 2l, 270, 756, 2160$ в случаях A_l, D_l, E_6, E_7, E_8, соответственно.

2.2. $2\pi/3$**-уравнения.** Пусть $I = \langle f^{2\pi/3} \rangle$.

Лемма 1. *Ранг $2\pi/3$-уравнений равен*

- $|\Phi|(l-2)$ *для* A_l*;*
- $|\Phi|(l-1)$ *для* D_l *и* E_l*.*

Посчитаем размерность I. Напомним общий вид $2\pi/3$-уравнения.

$$f^{2\pi/3}_{\alpha,\beta} = \sum_{i\neq\pm1} N_{\beta_1,-\beta_i} x_{\beta_1-\beta_i} x_{\beta_i} - x_{\beta_1} \sum_{s=1}^{l} \langle \beta_{-1}, \alpha_s \rangle \hat{x}_s$$

Заметим, что у любого $2\pi/3$-уравнения, суммы весов множителей каждого монома равны. А именно, $(\beta_1 - \beta_i) + \beta_i = \beta_1 = \alpha$ и $\hat{x}_s$ соответствуют нулевому весу. Таким образом, два уравнения, имеющие разную «сумму», линейно независимы. Осталось посчитать ранг системы уравнений, имеющих одинаковую «сумму».

Зафиксируем α. Уравнения, имеющие «сумму» α, это в точности уравнения вида $f^{2\pi/3}_{\alpha,\beta}$, где β любой корень, ортогональный к α. Так как в этой части мы говорим только про $2\pi/3$-уравнения и зафиксировали α, дальше, такие уравнения просто будем записывать как f_β. А идеал, который они порождают, будем обозначать как I_α. Как мы выяснили, I_α и $I_{\alpha'}$ не пересекаются для $\alpha \neq \alpha'$.

Лемма 2. *Уравнения из I_α «ведут себя» так же как параметризующие их корни, то есть*

- $f_{-\mu} = -f_\mu$
- *если $\mu \pm \nu$ — корень, то $f_{\mu\pm\nu} = f_\mu \pm f_\nu$*

Доказательство. Докажем для случая, когда $\mu + \nu$ является корнем, оставшиеся случаи доказываются аналогично. Заметим, что $f_{\mu+\nu}$ существует, так как если μ и ν ортогональны α, то и $\mu + \nu$ ортогонально α, по линейности скалярного произведения.

Посмотрим на слагаемые, связанные с нулевыми весами. Для них равенство верно, опять же по линейности скалярного произведения:

$$x_\alpha \sum_{s=1}^{l} \langle \mu+\nu, \alpha_s \rangle \hat{x}_s = x_\alpha \sum_{s=1}^{l} \langle \mu, \alpha_s \rangle \hat{x}_s + x_\alpha \sum_{s=1}^{l} \langle \nu, \alpha_s \rangle \hat{x}_s.$$

Проверим теперь слагаемые, не содержащие нулевые веса. Будем обозначать квадрат $\Omega(\alpha,\mu)$ через Ω_μ. Посмотрим как пересекаются квадраты, по которым мы построили уравнения.

- $\Omega_{\mu+\nu}$ с Ω_μ пересекаются по половине весов,
- $\Omega_{\mu+\nu}$ с Ω_ν пересекаются по половине весов,
- Ω_μ с Ω_ν пересекаются только по α.

Это следует из леммы 5 работы [9].

Отсюда видно, что $\Omega_{\mu+\nu} \subseteq \Omega_\mu \cup \Omega_\nu \cup \{\mu+\nu\}$ и любой вес из $\Omega_{\mu+\nu} \backslash \{\alpha, \mu+\nu\}$ лежит либо только в Ω_μ, либо только в Ω_ν, причем ортогональные пары лежат в разных квадратах.

Понятно, что если β_i входит только в один из Ω_μ, Ω_ν, то в $f_{\mu+\nu}$ соответствующий моном будет входить ровно с тем же знаком, так как перед ним стоит та же структурная константа $N_{\alpha,-\beta_i}$. Проверим, что все остальные слагаемые сократятся.

Рассмотрим $\beta_i \in \Omega_\mu$, такое что $\beta_i \notin \Omega_{\mu+\nu}$. Докажем, что $\alpha - \beta_i \in \Omega_\nu$. Тогда все бы сократилось, так как, моном $x_{\alpha-\beta_i}x_{\beta_i}$ входил бы в $f_\mu + f_\nu$ с константами $N_{\alpha,-\beta_i} + N_{\alpha,\beta_i-\alpha}$, а это равно 0 по [8].

Из равенства

$$\alpha - \beta_i + \nu + \beta_i = \alpha + \nu$$

достаточно доказать, что $\nu + \beta_i$ — вес, то есть, что $\angle(\nu, \beta_i) = 2\pi/3$ Заметим, что $\beta_i \notin \Omega_\nu$, так как Ω_μ и Ω_ν пересекаются только по α. Таким образом, $\angle(\nu, \beta_i) \neq \pi/3$. $\beta_i \neq \pm\nu$ по очевидным причинам. Таким образом $\angle(\nu, \beta_i) = 2\pi/3$. □

Таким образом, ранг системы уравнений из I_α равен размерности весового подпространства, ортогонального к α. Вспомнив, что фиксировать α можно любой, получаем лемму 1.

2.3. **π-уравнения.** Пусть $I = \langle f^\pi \rangle$.

Лемма 3. *Ранг π-уравнений равен*

- $(l+1)(l-2)/2$, *для* A_l
- $l-1$, *для* D_l
- $(l+2)(l-1)/2$, *для* E_l

В этой части $f^\pi_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta}$.

Пользуясь ровно такими же рассуждениями как в лемме 2, можно записать следующее:

Лемма 4. $f_{\alpha,\beta}$ *— симметрична и линейна по α и β. А именно,*

- $f_{\alpha,\beta} = f_{\beta,\alpha}$
- $f_{\alpha,-\beta} = -f_{\alpha,\beta}$
- $\beta_1 \pm \beta_2$ *— корень, тогда* $f_{\alpha,\beta_1\pm\beta_2} = f_{\alpha,\beta_1} \pm f_{\alpha,\beta_2}$

2.4. **Итого.** Пусть $I = \langle J \rangle$. Заметим, что если сложить ранги систем всех трех типов уравнений и упростить полученное выражение, то получается доказательство теоремы 2.

3. Сопоставление уравнениям весов соответствующего представления

Отметим, что веса частично упорядочиваются отношением $\mu \succ \nu$, означающим, что $\mu - \nu$ является суммой положительных корней. Для того, чтобы посчитать кратность весов, вспомним формулу Фрейденталя [19]:

Предложение 1. *Пусть $V = V(\lambda)$ — неприводимый модуль старшего веса λ. Пусть $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \succ 0} \alpha$. Если $\mu \in \Lambda$, то кратность $m(\mu)$ веса μ в V определяется рекуррентной формулой*

$$((\lambda + \delta) - (\mu + \delta))m(\mu) = 2\sum_{\alpha \succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

Прежде чем формулировать утверждение про сопоставление уравнений, рассмотрим, для наглядности, пример когда $\Phi = E_8$. Вес σ имеет норму 4. Таким образом, в представлении, соответствующему весу σ, нормы весов могут быть только $4, 2$ или 0. Посчитаем кратности этих весов и их количество. Кратность веса нормы 4 равна единице, так как он сопряжен старшему весу. Остальные кратности вычисляются с помощью формулы Фрейденталя.

Количество весов с нормой $2n$ — это соответствующий коэффициент у θ-функции решетки. Все первые коэффициенты давно посчитаны. Поэтому определить количество весов не составляет труда. Приведем, однако, пользуясь тем, что у нас решетка E_8 унимодулярная, красивый факт.

Предложение 2. *Количество векторов с нормой $2n$ для $\Phi = E_8$:*

$$240\sum_{d|n} d^3$$

Таким образом, получаем, что у нас 2160 весов с нормой 4, 240 весов с нормой 2 и 1 вес с нормой 0. А кратности их $1, 7$ и 35 соответственно. Итого, количество весов в представлении равно:

$$2160 \times 1 + 240 \times 7 + 1 \times 35 = 3875$$

А теперь вспомним, что у нас в E_8 ровно 2160 независимых $\pi/2$-уравнений, 240 непересекающихся идеалов размерности 7, порожденных $2\pi/3$-уравнениями, и, наконец, размерность идеала, порожденного π-уравнениями, равна 35.

Пользуясь нашим наблюдением, сформулируем общее утверждение:

Лемма 5. *Для Φ равного A, D или E и представления $\varpi = \sigma$ верно следующее:*

- *веса нормы 4 соответствуют $\pi/2$-уравнениям*
- *веса нормы 2 соответствуют $2\pi/3$-уравнениям*
- *веса нормы 0 соответствуют π-уравнениям*

Доказательство. Наш пример для E_8 ничем не отличается от других систем корней. Так же как и в примере, посчитав кратность и количества весов, получаем что произведение количества весов, фиксированной нормы, на их кратность равно рангу соответствующего типа уравнений.

Любое $\pi/2$-уравнение однозначно задается суммой ортогональных корней $\alpha+\beta$. Заметим, что поскольку все корни имеют норму 2 и $\alpha \perp \beta$, то $\alpha+\beta$ имеет норму 4. Таким образом, исходя из этого соображения, и совпадений размерностей, $\pi/2$-уравнения в точности соответствуют весам нормы 4.

Идеалу I_α, образованному из $2\pi/3$-уравнений, сопоставляем вес α и его норма равна двум. Заметим, что кратность α равна размерности I_α.

А всем π-уравнениям сопоставляем нулевой вес. Его кратность равна рангу системы π-уравнений. □

4. Следствия из вычислений

Рассмотрим $\pi/2-, 2\pi/3-, \pi-$уравнения как многочлены из

$$\mathbb{Z}[\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}, \{x_s\}_{s=1}^l]$$

.

Пусть I — идеал $\mathbb{Z}[\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}, \{x_s\}_{s=1}^l]$, порожденный этими многочленами. Пусть $G_I(R) = \{g \in GL(|\Phi|+l, R) | f(gx) \in I \ \forall f \in I\}$ соответствующая группа линейных преобразований, сохраняющая этот идеал.

Лемма 6. *Функтор $R \mapsto G_I(R)$ является определенной над $\mathbb{Z}$ аффинной групповой схемой.*

Априори, это так не для любого I. Однако следующая лемма показывает какие условия достаточно проверить, чтоб это было так.

Лемма 7. *Пусть $f_1, ..., f_s \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_t]$ многочлены степени не выше r. Пусть A — идеал, порожденный ими. Тогда для того, чтобы функтор $R \mapsto \{g \in GL(t, R) | f(gx) \in A \ \forall f \in A\}$ был аффинной групповой схемой, достаточно чтобы ранг $A \cap \mathbb{Z}[x_1, ..., x_t]_r$ не менялся при редукции по модулю любого простого $p \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Это следует из [10] (следствие 1.4.6). □

В нашем случае проверка изменений ранга опять же сводится к отдельной проверке для трех типов уравнений. Для $\pi/2$-уравнений это очевидно. Для остальных типов, зная размерность ранга, это несложная техническая проверка.

Список литературы

[1] W. Lichtenstein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector*, Proc. Amer. Math. Soc **84** (1982), no. 4, 605–608.

[2] M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for E_6*. I – IV, Invent. Math. **89** (1987), no. 1, 159–195; J. London Math. Soc. **37** (1988), 275–293; Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990) 45–84; J. Algebra **191** (1991) 23–39.

[3] M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups*, Geom. Dedicata **25** (1988), no. 1–3, 417–465.

[4] B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for E_7. I. A four form for E_7*, J. Algebra **173** (1995), no. 2, 361–389.

[5] M. M. Атаманова, А. Ю. Лузгарев, *Кубические формы на присоединенных представлениях исключительных групп*, Вопросы теории представлений алгебр и групп. 29, Зап. научн. сем. ПОМИ, 443, ПОМИ, СПб., (2016), 9–23

[6] А. Ю. Лузгарев, *Не зависящие от характеристики инварианты четвертой степени для $G(E_7, R)$*, Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия (2013), № 1, 44–51.

[7] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI, Мир, М., (1972).

[8] Н.А. Вавилов. *Как увидеть знаки структурных констант?* Алгебра и анализ **20** (2008), 9—40.

[9] A. Luzgarev, *Equations determining the orbit of the highest weight vector in the adjoint representation*, `arXiv:1401.0849v1 [math.AG]`.

[10] W.C. Waterhouse, *Automorphisms of $detX_{i,j}$: the group scheme approach*, Adv. in Math. **65** (1987), 171—203.

[11] W.J. McKay, J. Patera, *Tables of dimension, indices and branching rules for representations of Lie algebras*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, (1981).

[12] H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 1–62.

[13] M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings*, Amer. J. Math. **93** (1971), 965–1004.

[14] N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings*, Nonassociative algebras and related topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1991), 219–335.

[15] N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.

[16] N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations*, Acta Appl. Math. **45** (1996), no. 1, 73–113.

[17] Н. А. Вавилов, *Нумерология квадратных уравнений*, Алгебра и анализ **20**:5 (2008), 9–40.

[18] Н. А. Вавилов, *Еще немного исключительной нумерологии*, Зап. науч. сем. ПОМИ **375** (2010), 22–31.

[19] Дж. Хамфри *Введение в алгебры Ли и их представления*, М., Факториал 2003.